Kapittel 2: Beregning av sluttverdi, nåverdi og annuitet

I løsningsforslaget har vi benyttet følgende notasjon for endelige annuiteter:

Nåverdien av en endelig annuitet på 1 i n perioder med rente i%: $A_{n,i\%}$
Nåverdien av 1 fordelt over n perioder med rente i%: $A^{-1}_{n,i\%}$

Sistnevnte kalles ofte annuitetsfaktoren. (Se i læreboka for nærmere forklaring av sammenhengen mellom nåverdi og endelige annuiteter.)

Oppgave 1

Sluttbeløp inkl. rentes-rente: $10\,000 \cdot 1{,}02^3 = 10\,612$

Oppgave 2

a) Beløpet bør benyttes til nedbetaling av studiegjelda (2,5% > 2%).
b) <u>Boligrente: 2,25%</u>
Studiegjelda bør nedbetales (det er bedre å låne til 2,25% enn til 2,5%). <u>Boligrente: 3%</u>
Studiegjelda bør beholdes uendret og boliglånet bør minimaliseres

Oppgave 3

<u>7% årlig prisstigning</u>
$1{,}07^n = 2 \Rightarrow n$ er vel 10 år (10,3)
<u>2% årlig prisstigning</u>
$1{,}02^n = 2 \Rightarrow n$ er ca. 35 år

Oppgave 4

$100\,000 \cdot 1{,}02^n = 134\,000 \Rightarrow n = 14{,}8$ år

Oppgave 5

a) $300\,000 \cdot 1{,}05^n = 400\,000 \Rightarrow n = 6$ år (5,9 år)
b) $300\,000 \cdot 1{,}08^n = 400\,000 \Rightarrow n = 4$ år (3,7 år)

Det regnes med 4 år.

År	*Verdi tomt (IB)*	*Verdi UB (2.kolonne · 1,08)*
1	300 000	324 000
2	324 000	349 920
3	349 920	377 914
4	377 914	408 147

Oppgave 6

$$100 \cdot \left(1 + \frac{i}{100}\right)^5 = 153{,}9 \rightarrow i = 9\%$$

Oppgave 7

Nåverdi = $\frac{20\ 000}{(1+3\%)^3} = 18\ 303$

Oppgave 8

a) Nåverdi = $\frac{100\ 000}{(1+5\%)^3} = 86\ 384$

b) Nåverdi = $\frac{100\ 000}{(1+5\%)^5} = 78\ 353$

De beløpene vi har funnet ovenfor, kan vi gjerne tolke som de beløpene du kan låne i dag på basis av fordringen. Jo lenger tid det er før fordringen forfaller, jo større blir lånerenten i kroner (inkl. rentes-rente) og jo mindre verdt er fordringen.

Oppgave 9

a) Nåverdi = $\frac{22\ 000}{(1+2\%)^2} = 20\ 731$

Siden 20 731 > 20 000, bør du velge betalingsutsettelse.

b) Sluttverdi av 20 000 om 3 år: 20 000 · $1{,}02^3$ = 21 224

c) 20 000 = $\frac{22\ 000}{(1+i)^3}$ → i = 3,2%

Oppgave 10

a) Nåverdi = $\frac{500\ 000}{(1+7\%)^3} = 408\ 149$

b) Årlig rentebeløp: 408 149 · 0,07 = 28 570

Sluttbeløp: 28 570 · $1{,}04^2$ + 28 570 · 1,04 + 28 570 + 408 149 = 497 334

Oppgave 11

a) Nåverdi = $25\ 000 + \frac{15\ 000}{(1+2\%)} + \frac{10\ 000}{(1+2\%)^2} = 49\ 318$

b) Nåverdi – kontantbeløp = 49 318 – 25 000 = 24 318

År	*Disponibelt beløp (IB)*	*Rente (2%)*	*IB + rente*	*Uttak*
1	24 318	486	24 804	15 000
2	9 804	196	10 000	10 000

c) $24\ 318 = \frac{X}{(1+2\%)} \rightarrow X = 24\ 804$ (jfr. Løsning under b)

d) Sluttverdi: 25 000 · $1{,}02^2$ + 15 000 · 1,02 + 10 000 = 51 310

Plasseres pengene løpende til 2% rente, vil du etter to år ha disponibelt 51 310

Merk at $\frac{51\ 310}{(1+2\%)^2} = 49\ 318$ = nåverdi under a

Oppgave 12

a) Verdi etter 3 år: 800 000 · $1{,}02^3$ = 848 966

Verdi utleid hytte: $\frac{60\ 000}{(1+10\%)} + \frac{63\ 000}{(1+10\%)^2} + \frac{66\ 000+848\ 966}{(1+10\%)^3} = 794\ 039$

b) Verdien er kr 800 000 i dag uten leiekontrakt. Leiekontrakten er derfor ikke fordelaktig, idet leien ikke forrenter den kapital som er investert i hytta. Vurderer man å selge hytta, bør man selge den fremfor å leie den ut i 3 år og så selge hytta.

c) Sluttverdi: 60 000 · $1{,}1^2$ + 63 000 · 1,1 + 66 000 = 207 900

Oppgave 13

Illustrasjon:

0	1	2	3
– 50 000	2 000	3 000	3 000 57 830

$$-50\ 000 + \frac{2\ 000}{(1+i)} + \frac{3\ 000}{(1+i)^2} + \frac{3\ 000 + 57\ 830}{(1+i)^3} = 0 \rightarrow i = 10\%$$

Oppgave 14

0	1	2	3
–105 154	10 000	10 000	10 000 100 000

$$-105\ 154 + \frac{10\ 000}{(1+i)} + \frac{10\ 000}{(1+i)^2} + \frac{10\ 000 + 100\ 000}{(1+i)^3} = 0 \rightarrow i = 8\%$$

Avkastningen blir mindre enn pålydende rente fordi obligasjonene er kjøpt til overkurs.

Oppgave 15

a) Nåverdi = $\frac{15\ 000}{8\%} = 187\ 500$ (formel for uendelig vekstrekke der vekst, g, er 0.

b) Nåverdi = $\frac{15\ 300}{8\%-2\%} = 255\ 000$

c) $15\ 300 \cdot \frac{1-\left(\frac{1+2\%}{1+8\%}\right)^{100}}{8\%-2\%} = 254\ 160$ (Formel for endelig vekstrekke)

Som det fremgår av b) og c), spiller det liten rolle om en regner med en uendelig levetid eller en levetid på 100 år.

Oppgave 16

a) Nåverdi = $\frac{3 \cdot 1{,}01}{7{,}5\%-1\%} = 46{,}6$

Merk at vi regner med forventet utbytte om ett år i telleren. Når dette skrives, er kursen for hydroaksjen kr 45,6. Markedet deler derfor øyensynlig ikke vår oppfatning om vekst og avkastningskrav.

b)

År			*Verdi*
0			46,6
1	$46{,}6 \cdot 1{,}01$	=	47,1
2	$46{,}6 \cdot 1{,}01^2$	=	47,5
3	$46{,}6 \cdot 1{,}01^3$	=	48,0

c) Nåverdi = $\frac{20\cdot 1{,}005}{7{,}5\%-0{,}5\%} = 43{,}1$

Oppgave 17

Nåverdi skattereduksjon med avskrivingssats 15%: $\frac{10\cdot 0{,}15*0{,}23}{5\%-(-15\%)} = 1{,}725$

Nåverdi skattereduksjon med avskrivingssats 2%: $\frac{10\cdot 0{,}02*0{,}23}{5\%-(-2\%)} = 0{,}657$

Oppgave 18

Salgsverdi: $50\ 000 + \sum_{t=1}^{3}\frac{15\ 000}{1{,}02^t} = 50\ 000 + 15\ 000 \cdot A_{3,2\%} = 93\ 258$

Oppgave 19

a) Nåverdi pensjon: $\sum_{t=1}^{5}\frac{30\ 000}{1{,}04^t} = 133\ 555$

År	*Innskudd (IB)*	*Innskudd (UB)*	*Uttak*
1	133 555	138 897	30 000
2	108 897	113 253	30 000
3	83 253	86 583	30 000
4	56 583	58 846	30 000
5	28 846	30 000	30 000

Innskudd (UB) er funnet ved å multiplisere Innskudd (IB) med 1,04.

b) $30\ 000 \cdot 1{,}04^4 + 30\ 000 \cdot 1{,}04^3 + 30\ 000 \cdot 1{,}04^2 + 30\ 000 \cdot 1{,}04 + 30\ 000 = 133\ 555 \cdot 1{,}04^5 = 162\ 490$

Plasseres pensjonen løpende til 4% rente, disponeres kr 162 490 etter 5 år

Oppgave 20

Nåverdi pensjon på pensjoneringstidspunktet (nåverdi etterskuddsannuitet):

$$\sum_{t=1}^{10}\frac{400\ 000}{1{,}08^t} = 2\ 684\ 033$$

Gjeld for den lederen som går av om 5 år:

$$\frac{2\ 684\ 033}{1{,}08^5} = 1\ 826\ 707$$

Gjeld for den lederen som går av om 20 år:

$$\frac{2\,684\,033}{1{,}08^{20}} = 575\,854$$

Total gjeld: 2 402 561

Oppgave 21

a) Annuitet: 200 000 · $A_{3,9\%}^{-1}$ = 79 011

b) Rente 1. år: 200 000 · 0,09 = 18 000
Avdrag 1. år: 79 011 - 18 000 = 61 011
Avdraget øker med 9 % pr. år. Når avdraget er beregnet, kan renten finnes som en restpost

År	*1*	*2*	*3*	*Sum*
Avdrag	61 011	66 502	72 487	200 000
Rente	18 000	12 509	6 524	
Annuitet	79 011	79 011	79 011	