Handelshøyskolen BI

Eksamen i Met 91001 Matematikk for økonomer.

4.12 2002 kl 09.00 til 14.00

Løsninger

OPPGAVE 0.1

Vi skal derivere disse funksjonene

a) $f(x) = 3x^{-8} + 3x^2$

$f'(x) = -24x^{-8-1} + 3 \cdot 2x = -24x^{-9} + 6x$

b) $f(x) = \dfrac{x^4}{x^4 + x + 1}$

$$f'(x) = \frac{4x^3(x^4 + x + 1) - x^4(4x^3 + 1)}{(x^4 + x + 1)^2}$$
$$= \frac{4x^7 + 4x^4 + 4x^3 - 4x^7 - x^4}{(x^4 + x + 1)^2}$$
$$= \frac{3x^4 + 4x^3}{(x^4 + x + 1)^2} = \frac{x^3(3 + 4x)}{(x^4 + x + 1)^2}$$

Her skal vi finne når $f'(x) = 0$.

Da må $x^3(3 + 4x) = 0$ og det medfører at $x = 0$ eller at

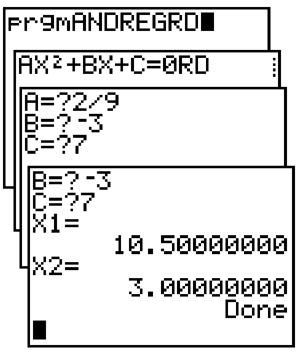
$3x + 4 = 0$ som gir oss løsningen $x = -\dfrac{4}{3}$

c) $f(x) = (x^2 + \sqrt{x})^3$ $\qquad f'(x) = 3(x^2 + \sqrt{x})^2\left(2x + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

Det er ikke å forenkle dette utrykket.

OPPGAVE 0.2

a) Løs likningen $\qquad \dfrac{2}{9}x^2 - 3x + 7 = 0$.



Her multipliserer vi hele likningen med 9 for å bli kvitt brøken og får

$$2x^2 - 27x + 63 = 0$$

$$x = \frac{-(-27) \pm \sqrt{27^2 - 4 \cdot 2 \cdot 63}}{2 \cdot 2} = \frac{27 \pm \sqrt{729 - 504}}{4}$$

$$= \frac{27 \pm 15}{4} = \begin{cases} 3 \\ 10,5 \end{cases}$$

b) Løs likningen $\qquad 3 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{x}\right) - 7 = 0$

Her er det lurt å multiplisere likningen med x^2 for da blir oppgaven å løse denne likningen

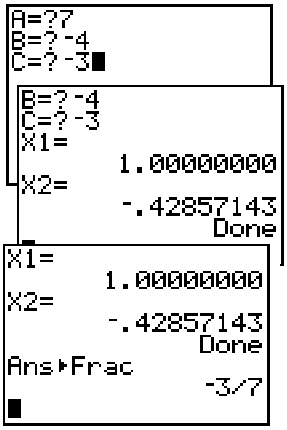
$$3 + 4x - 7x^2 = 0 \quad | \cdot (-1) \qquad ì$$

$$7x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 7 \cdot (-3)}}{14}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{100}}{14} = \frac{4 \pm 10}{14}$$

$$x = 1 \quad \text{eller} \quad x = -\frac{3}{7}$$



Obs!

For å finne et resultat i brøkform, bruker vi denne sekvensen:
˘ç
1:~Frac
Õ
Da får du på skjermen:
Ans ~ **Frac**
Svar med Õ

Det er ikke alle svar eller tall som kan skrives som brøk.

c) Følgende likningssett skal løses

$$x + \sqrt{y} = 9$$
$$x - \sqrt{y} = 1$$

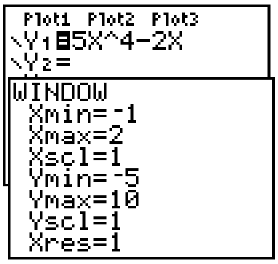
Vi legger sammen likningene som de står og da får vi

$$2x = 10 \qquad x = 5$$

Fra den første likningen kan vi skrive

$$\sqrt{y} = 9 - x = 9 - 5 = 4$$
$$y = 16$$

Løsningen er $x = 5$ og $y = 16$

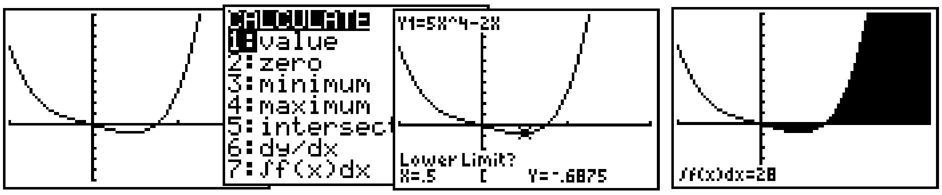


d) $\int_0^2 (5x^4 - 2x)dx = \left[5 \cdot \frac{1}{5}x^5 - 2 \cdot \frac{1}{2}x^2\right]_0^2$

$= [x^5 - x^2]_0^2 = 2^5 - 2^2 = 32 - 4 = 28$

Her kan vi la kalkulatoren beregne det bestemte integralet.

Vi tegner grafen til intgrand-funksjonen i et passende vindu,



og med yCALC 7 Õ 0 Õ 2 Õ så er integralet funnet. Det er ikke arealet av den skraverte flaten som er funnet, snarere differansen.

OPPGAVE 0.3

a) Lånebeløp $K_0 = 210000$ kr

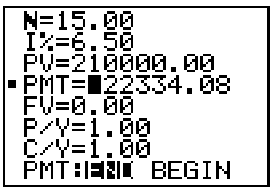
Terminrente $r = 0,065$

Antall terminer $n = 15$

Den årlige innbetalingen er (se formel side 357: Terminvist beløp ved annuitetslån)

$$K = K_0 \cdot \frac{(1+r)^n \cdot r}{(1+r)^n - 1} = 210000 \cdot \frac{1,065^{15} \cdot 0,065}{1,065^{15} - 1}$$

$$= 22334 \text{ kr}$$



Rente det første året? $210000 \cdot 0,065 = 13650$ kr

Avdrag det første året? $210000 - 13650 = 8684$ kr

Restlån etter 1. innbetaling $210000 - 8684 = 201316$ kr

Rente det andre året? $201316 \cdot 0,065 = 13086$ kr

b) Uttak per termin $K = 25000$ kr

Antall terminer $n = 15$

Terminrente $\qquad r = 0,09$

Nåverdien er (se formel side 356: Nåverdien av en etterskuddsannuitet):

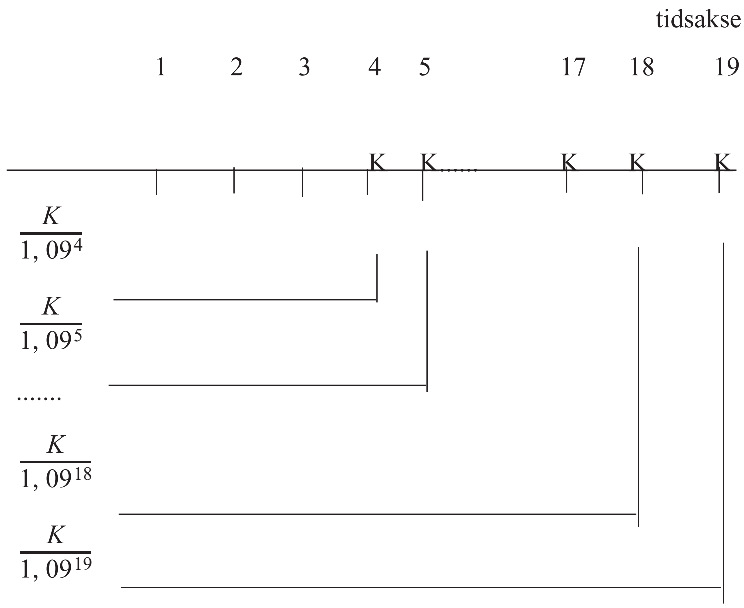
$$K_0 = K \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r \cdot (1+r)^n} = 25000 \cdot \frac{1,09^{15} - 1}{0,09 \cdot 1,09^{15}}$$
$$= 201517 \text{ kr}$$

c) Kjøp av seilbåt:

i) Nåverdien er, som i b)

$$K_0 = 201517 \text{ kr}$$

ii) Her har vi ikke noen ferdig formel. Derfor setter vi opp en tidsakse og merker av når nedbetalingene skal foretas. Deretter finner vi nåverdiene til disse beløpene og summerer den geometrisk rekken



Da er kontantverdien summen av beløpene til venstre i figuren.

$$K_0 = K\left(\frac{1}{1,09^4} + \frac{1}{1,09^5} + \ldots + \frac{1}{1,09^{19}}\right)$$

Summen i parentesen er en geometrisk rekke og finnes ved å bruke formel s 345.

$$K_0 = 29000 \cdot \frac{1}{1,09^4} \cdot \frac{\left(\frac{1}{1,09}\right)^{15} - 1}{\frac{1}{1,09} - 1} = 180565 \text{ kr}$$

Men vi kunne også funnet denne kontantverdien ved først å finne kontantverdien ved slutten av år 3

$$K_3 = K \cdot \frac{(1+r)^{15} - 1}{r \cdot (1+r)^{15}} = 29000 \cdot \frac{1,09^{15} - 1}{0,09 \cdot 1,09^{15}} = 233759 \text{ kr}$$

Verdien ved år 0 er (husk å telle år riktig!)

$$K_0 = \frac{K_3}{1,09^3} = 180506 \text{ kr}$$

Båtkjøperen bør velge alternativ ii) da dette har det den minste nåverdien.

OPPGAVE 0.4

Sammenhengen mellom etterspørselen x og prisen p etter en vare var gitt ved

$$x(p) = 300 - p^2 .$$

a) Vi skal finne elastisiteten E_p. Den er gitt ved formelen (s 229)

$$E_p = x'(p) \cdot \frac{p}{x(p)}$$

Her er $x'(p) = -2p$ og da blir elastisiteten

$$E_p = -2p \cdot \frac{p}{300 - p^2} = \frac{-2p^2}{300 - p^2}$$

b) Elastisiteten når $p = 5$

$$E_p = \frac{-2 \cdot 5^2}{300 - 25} = -\frac{50}{275} = -0,18$$

Dette kan forklares med at “Hvis vi øker prisen med 1%, vil etterspørselen avta med 0,18%”.

c) Elastisiteten er lik -1 når

$$E_p = \frac{-2p^2}{300 - p^2} = -1$$

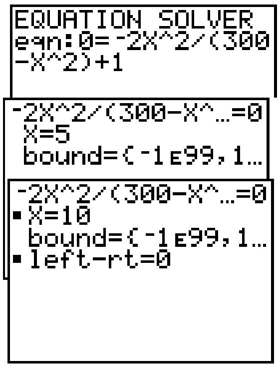
$$-2p^2 = -300 + p^2$$

$$-2p^2 - p^2 = -300$$

$$-3p^2 = 300$$

$$p^2 = 100 \qquad p = 10$$

Vi kan ikke bruke negativ pris!



ç
0:~Solver
Õ
Skriver inn likningen
Velger x = 5(for eks)
Stå med markøren på 5-tallet
ÉÕ
løser likningen

OPPGAVE 0.5

a) Kostnadsfunksjonen er $C(z) = z^2 + 35z + 144$

Da er grensekostnaden $C'(z) = 2z + 35$

For at grensekostnaden skal være 65 må

$$2z + 35 = 65 \quad \Leftrightarrow \quad 2z = 30 \quad \Leftrightarrow \quad z = 15$$

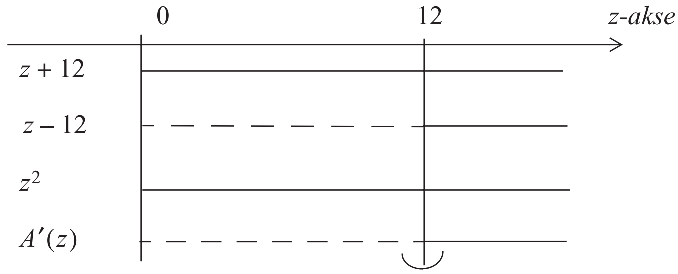
b) Enhetskostnaden er

$$A(z) = \frac{C(z)}{z} = z + 35 + \frac{144}{z} = \frac{z^2 + 35z + 144}{z}$$

Her deriverer vi og faktoriserer den deriverte

$$A'(z) = \frac{(2z+35) \cdot z - (z^2 + 35z + 144) \cdot 1}{z^2}$$

$$= \frac{z^2 - 144}{z^2} = \frac{(z+12)(z-12)}{z^2}$$



Vi ser av endringen i foregnet til $A'(z)$ at $z = 12$ er et minimum for enhetskostnaden.

c) Profitten

$$\begin{aligned} f(x,y) &= p \cdot x + q \cdot y - C(x,y) \\ &= (150 - 0{,}5x) \cdot x + 140y - [(x+y)^2 + 35(x+y) + 144] \\ &= 150x - 0{,}5x^2 + 140y - x^2 - 2xy - y^2 - 35x - 35y + 144 \\ &= -1{,}5x^2 - 2xy - y^2 + 115x + 105y - 144 \end{aligned}$$

d) For å finne maksimal profitt, må vi finne funksjonens stasjonære punkter. Vi deriverer og setter de deriverte lik 0.

$$f_x'(x,y) = -3x - 2y + 115 = 0$$

$$f_y'(x,y) = -2x - 2y + 105 = 0$$ Multipliserer med -1

$$-3x - 2y + 115 = 0$$ Legger sammen de to

$$2x + 2y - 105 = 0$$ likningene

$$-x + 10 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 10$$

$$\begin{aligned} -3 \cdot 10 - 2y + 115 &= 0 \\ -2y &= 30 - 115 \\ -2y &= -85 \quad \Leftrightarrow \quad y = 42{,}5 \end{aligned}$$

For å se om verdiparet $(x,y) = (10,\ 42{,}5)$ virkelig gir maksimum for profitten, finner vi de tre annenordens deriverte

$$f''_{xx} = -3 = A \qquad f''_{xy} = -2 = B \qquad f''_{yy} = -2 = C$$

Her ser vi at
$$\begin{aligned} & A \cdot C - B^2 \\ &= (-3) \cdot (-2) - (-2)^2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

og at $A < 0$

verdiparet gir maksimum for profitten.

Den maksimale profitten er

$$\begin{aligned} f(x, y) &= -1,5x^2 - 2xy - y^2 + 115x + 105y - 144 \\ f(10,42,5) &= -1,5 \cdot 10^2 - 2 \cdot 10 \cdot 42,5 - 42,5^2 + 115 \cdot 10 \\ &\quad + 105 \cdot 42,5 - 144 \\ &= 2662,25 \end{aligned}$$

e) Bedriften ønsker å selge tre ganger så mye på marked A som på marked B, altså må vi legge til bibetingelsen

$$g(x, y) = x - 3y = 0$$

f) Lagrange-funksjonen blir da

$$\begin{aligned} F(x, y) &= f(x, y) - \lambda(g(x, y) - C) \\ &= -1,5x^2 - 2xy - y^2 + 115x + 105y - 144 - \lambda(x - 3y) \end{aligned}$$

Vi finner de to førstederiverte til F og eliminerer λ

$$\begin{array}{ll|l} F'_x = -3x - 2y + 115 - \lambda & = 0 & \cdot 3 \\ F'_y = -2x - 2y + 105 + 3\lambda & = 0 & \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} -9x - 6y + 345 - 3\lambda = 0 & \text{adderer likningene} & (1) \\ -2x - 2y + 105 + 3\lambda = 0 & & (2) \\ \hline -11x - 8y + 450 = 0 & & (3) \end{array}$$

Men her er bibetingelsen god å ha. Den sier at

$x - 3y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3y$

som vi setter inn i likning (3)

$$\begin{aligned} -11 \cdot 3y - 8y + 450 &= 0 \\ -42y &= -450 \\ y &= \frac{450}{41} \approx 10,97 \end{aligned}$$

og da blir den tilhørende x-verdien

$x = 3y \approx 32,93$

OPPGAVE 0.6

a) De partielle deriverte av 1. orden til funksjonen

$$f(x, y) = (x^2 - 2)e^x + xe^y$$

er
$$\begin{aligned} f'_x &= 2xe^x + (x^2 - 2)e^x + e^y \\ &= (2x + x^2 - 2)e^x + e^y \\ &= (x^2 + 2x - 2)e^x + e^y \end{aligned}$$

og
$$f'_y = xe^y$$

b) Stasjonære punkter når

$$(x^2 + 2x - 2)e^x + e^y = 0 \qquad (1)$$

og
$$xe^y = 0 \qquad (2)$$

Av likning (2) får vi at $x = 0$

og settes det inn i likning (1) , gir den at

$$\begin{aligned} & -2e^0 + e^y = 0 \\ & e^y = 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad y = \ln 2 \end{aligned}$$

Funksjonen har ett stasjonært punkt

$$(x, y) = (0, \ln 2)$$